הטכניון – בוחן חורף תשע"ג 21.12.2012
מד"ר/ח (104131)

פתרון

- ✓ משך הבחן 90 דקות והוא מכיל 4 שאלות.
- ✓ אין להשתמש בכל חומר עזר (כולל מחשבונים).
- ✓ אין לכתוב בעפרון.
- ✓ כל ניסוח בלשון זכר מיועד לסטודנטים ולסטודנטיות כאחד.

יש לנמק היטב ובפירוט את התשובות (גם בשאלות החישוביות). כמו כן, יש לצטט במדויק כל משפט שאת/ה משתמש/ת בו כולל ניסוח מדויק ובדיקת תנאים.

שאלה 1 (35 נקודות) נתונה המשוואה הדיפרנציאלית $y'+(x-y)^{\frac{1}{2}}=1$.

א) מצא את הפתרון הכללי של המשוואה.

ב) מצא שני פתרונות שונים המקיימים את התנאי $y(1)=1$, והסביר מדוע זה לא סותר את משפט הקיום והיחידות. באיזה תחום מוגדר כל פתרון?

פתרון:

א) $y'+(x-y)^{\frac{1}{2}}=1$ מד"ר לא ליניארית מסדר ראשון המוגדרת בתחום $y \le x$.

ניתן להשתמש בהצבה $u(x)=x-y(x)$.

נקבל: $y'(x)=1-u'(x)$

ואז המשוואה $1-u'+u^{\frac{1}{2}}=1$ או $u'=\sqrt{u}$, $u \ge 0$.

קיבלנו משוואה פרידה והפתרון הכללי שלה

$u=\frac{1}{4}(x+c)^2$, $x+c \ge 0$ וגם פתרון הנוסף $u(x)=0$ המוגדר בכל x ממשי.

אחרי חזרה ל- x, y נקבל $y=x-\frac{1}{4}(x+c)^2$ כאשר $x+c \ge 0$ וגם $y=x$ המוגדר בכל x ממשי.

ב) נציב תנאי הנתון בפתרון הכללי:

$y(1)=1-\frac{1}{4}(1+c)^2=1$ אז $c=-1$ והפתרון $y=x-\frac{1}{4}(x-1)^2$, $x-1 \ge 0$.

הפתרון $y=x$ גם מקיים את התנאי. זה לא סותר את משפט הקיום והיחידות כי תנאי המשפט לא מתקיימים: נגדיר $y'=1-(x-y)^{\frac{1}{2}}=f(x,y)$. הפונקציה $f(x,y)$ רציפה בכל תחום בו המשוואה מוגדרת ונגזרת שלה לא רציפה על הקו $y=x$ אז בכל נקודה של הקו הזה תנאי המשפט לא מתקיימים.

<u>שאלה 2</u>: (20 נקודות) בין כל העקומים שמאונכים למשפחת העקומים $(x+c)y+cx-1=0$ מצא את העקומים העוברים דרך הנקודה $(1,1)$.

<u>פתרון:</u>

1) מציאת המשוואה הדיפרנציאלית של המשפחת העקומים הנתונה:

$$xy+cy+cx-1=c(y+x)+xy-1=0$$

$c=\frac{1-xy}{y+x}$. נגזור ונקבל $0=\frac{-(y+xy')(x+y)-(1-xy)(1+y')}{(y+x)^2}$

$(y+xy')(x+y)+(1-xy)(1+y')=0$. המשוואה: $y'=-\frac{y^2+1}{x^2+1}$.

2) המשוואה הדיפרנציאלית של המשפחת העקומים האורתוגונליים: $y_{ort}'=-\frac{1}{y'}$

אז נקבל את המשוואה $y'=\frac{x^2+1}{y^2+1}$.

הפתרון של המשוואה: $(y^2+1)dy=(x^2+1)dx$

$\frac{y^3}{3}+y-\frac{x^3}{3}-x=C$ או $y^3-x^3+3(y-x)=C$.

3) העקומים העוברים דרך הנקודה $(1,1)$:

$$C=1^3-1^3+3(1-1)=0$$

$y^3-x^3+3(y-x)=0$, $(y-x)(y^2+xy+x^2+3)=0$

העקום היחיד (לפי משפט הקיום והיחידות) $y=x$.

<u>שאלה 3</u>: (35 נקודות) נתונה המשוואה $(x^2-1)y'-xy=x^2-1$.

א) מצא פתרון כללי של המשוואה

ב) האם קיים פתרון המקיים $y(0)=1$? אם כן, מצא את הפתרון. כמה פתרונות כאלו קיימים?

ג) האם קיים פתרון המקיים $y(2)=1$? אם כן, מצא את הפתרון. כמה פתרונות כאלו קיימים?

ד) האם התוצאות שקיבלתם בסעיפים (ב) ו-(ג) אינן סותרות את משפט הקיום והיחידות?

<u>פתרון:</u>

א) מד"ר ליניארית מסדר ראשון המוגדרת בכל x ממשי. המשוואה המנורמלת:

$y'-\frac{x}{x^2-1}y=1$. משפט הקיום והיחידות מתקיים בתחומים $(-\infty,-1)$, $(-1,1)$, $(1,\infty)$.

גורם האינטגרציה: $\mu(x)=\exp\left(-\int\frac{xdx}{x^2-1}\right)=\frac{1}{\sqrt{|x^2-1|}}$.

לפי הערך המוחלט נקבל 2 תחומים שונים של הפתרון הכללי:

a) $|x|<1$

$\mu(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ והפתרון הכללי $y=\sqrt{1-x^2}\,\mathbf{arcsin}(x)+C\sqrt{1-x^2}$.

b) $|x|>1$

$\mu(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ והפתרון הכללי $y=\sqrt{x^2-1}\ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|+C\sqrt{x^2-1}$.

ב) פתרון קיים והוא הפתרון היחיד (לפי משפט הקיום והיחידות).

נקודת ההתחלה $x_0=0$ בתחום $|x|<1$ אז נשתמש בפתרון

$y=\sqrt{1-x^2}\,\mathbf{arcsin}(x)+C\sqrt{1-x^2}$ ונקבל פתרון המקיים את התנאי

$$y=\sqrt{1-x^2}\,\mathbf{arcsin}(x)+\sqrt{1-x^2},\quad |x|<1$$

ג) פתרון קיים והוא הפתרון היחיד (לפי משפט הקיום והיחידות).

נקודת ההתחלה $x_0=2$ בתחום $x>1$ אז נשתמש בפתרון

$y=\sqrt{x^2-1}\,\mathbf{ln}\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)+C\sqrt{x^2-1}$ ונקבל פתרון המקיים את התנאי

$$y=\sqrt{x^2-1}\,\mathbf{ln}\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}-\mathbf{ln}\left(2+\sqrt{3}\right)\right)\sqrt{x^2-1},\quad x>1$$

ד) התוצאות בסעיפים (ב) ו-(ג) אינן סותרות את משפט הקיום והיחידות (למה?).

<u>שאלה 4 :</u> (15 נקודות) נתונה בעיית ההתחלה $y'=(2-\sin^2 x)(y^2-y^5),\quad y(0)=0.25$.

א) האם קיים פתרון של הבעיה? אם כן, האם הפתרון יחיד?

ב) (בונוס 5 נקודות) אם יש פתרון האם קיים עבורו $\lim\limits_{x\to+\infty} y(x)$?

<u>פתרון:</u>

א) נגדיר $f(x,y)=(2-\sin^2 x)(y^2-y^5)$. הפונקציה $f(x,y)$ וגם הנגזרת $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=(2-\sin^2 x)(2y-5y^4)$ רציפות בכל המישור הממשי אז משפט הקיום והיחידות מתקיים בכל המישור ואז קיים פתרון יחיד של הבעיה.

ב) משפט הקיום והיחידות מתקיים בכל המישור וזה אומר שפתרונות של המשוואה לא נפגשים באף נקודה במישור. קל לראות שהפונקציות $y_1(x)=0$ ו-$y_2(x)=1$ פתרונות של המשוואה. בנקודה $x_0=0$ מתקיים $y_1(0)<y(0)<y_2(0)$ ואז לכל x מתקיים $y_1(x)<y(x)<y_2(x)$ (לפי הגדרת פתרון כפונקציה רציפה ולפי משפט ההמשכה).

בתחום $0<y<1$ הנגזרת של הפתרון

$y'=(2-\sin^2 x)(y^2-y^5)=(2-\sin^2 x)y^2(1-y^3)>0$ אז הפתרון רציף, עולה מונוטונית וחסום בתחום $x>0$ ולכן קיים הגבול.